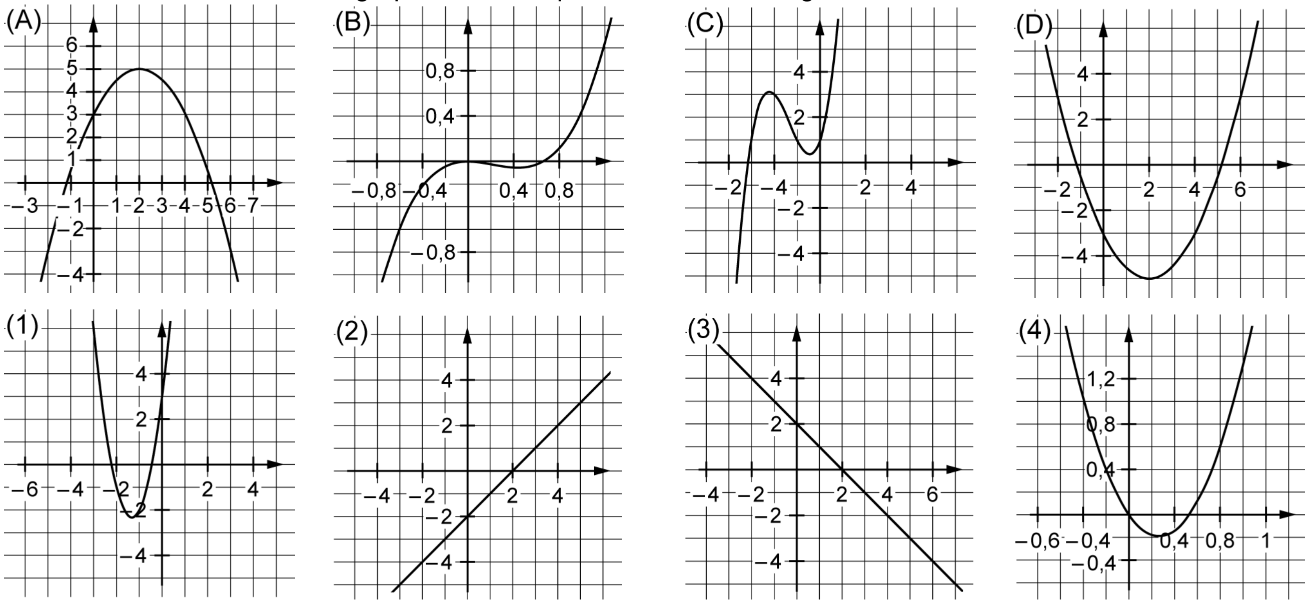
Kompetenzplan zur Klausurvorbereitung (Nr. 1) – Selbsteinschätzung

Checkliste „Ganzrationale Funktionen“	Testaufgaben	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann (LE = Lerneinheit)	Trainingsaufgaben (WVV = Wiederholen, Vertiefen, Vernetzen, S. 41-44)
1. Ich kann zu einem Funktionsgraphen den Graphen seiner Ableitungsfunktion skizzieren.	1					LE 1 (S. 10-12) Lehrtext	LE1, A. 3 S. 13
2. Ich kann Extrempunkte von Graphen ganzrationaler Funktionen bestimmen.	2					LE 1, Lehrtext, LE 3 Merkkasten (S. 19)	WVV, A. 4
3. Ich kenne die Bedeutung der zweiten Ableitung und kann den Verlauf ihres Graphen interpretieren.	3					LE 2 Merkkasten und LE 3 Merkkasten	WVV, A. 9
4. Ich kann besondere Punkte des Graphen einer ganzrationalen Funktion bestimmen.	4					LE 3 Merkkasten; LE 4 Merkkasten	WVV, A. 4 und A. 5
5. Ich kann die Begriffe rund um den Ableitungsbegriff erklären und anwenden.	5					LE 3 Lehrtext, LE 4 Lehrtext	WVV, A. 10
6. Ich kann Wendepunkte von Graphen ganzrationaler Funktionen bestimmen.	6					LE 4, Merkkasten	WVV, A. 5
7. Ich kann Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen.	7					LE 5, Lehrtext und Beispiel	Training, A. 5, S. 46
8. Ich kann ganzrationale Funktionen anhand der Eigenschaften des Graphen bestimmen.	8					LE 6, Merkkasten, Beispiel 1	Training, A. 7, S.47
9. Ich kann ganzrationale Funktionen im Sachzusammenhang bestimmen	9					LE 6 Lehrtext und Beispiel 2	Training A. 6, S. 47
10. Ich kann Funktionenscharen untersuchen und besondere Punkte in Abhängigkeit vom Parameter angeben.	10					LE 8 Lehrtext und Beispiel	LE 8, A. 5
11. Ich kann die Ortskurve von Extrempunkten einer Funktionenschar bestimmen	11					LE 7 Beispiel, LE 8 1. Infokasten	WVV A. 17

Check-out: Klausurvorbereitung – Test- und Trainingsaufgaben

1 Ordnen Sie dem Funktionsgraphen den Graphen seiner Ableitungsfunktion f' zu:

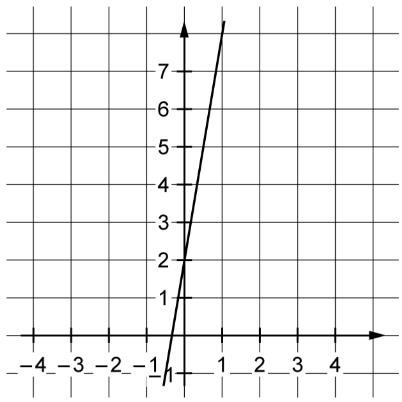


2 Berechnen Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f.

a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 5$ b) $f(x) = x^3 + x^2 - x$ c) $f(x) = x^4 - x^3$ d) $f(x) = -3x^3 + x - \frac{1}{3}$

3 Gegeben ist der Graph der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie.

a) f' ist streng monoton fallend.
b) Der Graph von f' hat an der Stelle $x = x_0$ einen Wendepunkt.
c) Der Graph von f ist für $x < x_0$ linksgekrümmt.
d) Der Graph von f' ist für $x > 0$ linksgekrümmt.



4 Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$:
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Extrem- und Wendepunkte, sowie Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

5 Ergänzen Sie den Text in den Lücken.

a) Eine Stelle x_0, an der der Graph einer Funktion f ____ heißt Wendestelle von f.

b) Wenn für eine Funktion f gilt, dass ____________ und $f''(x_0) < 0$, dann hat die Funktion f ein lokales

____________ $f(x_0)$.

c) Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt ____________.

d) Der Parameter einer Funktionenschar wird beim Ableiten wie ____________ behandelt.

6 Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion f.

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

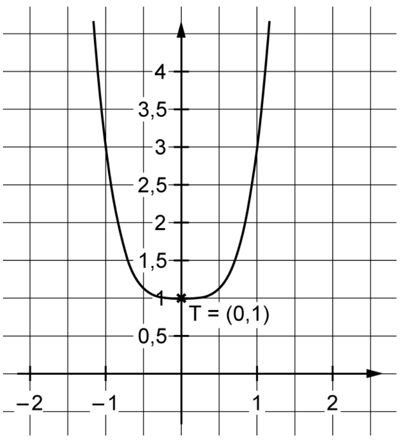
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - x$

d) $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + x + 2$

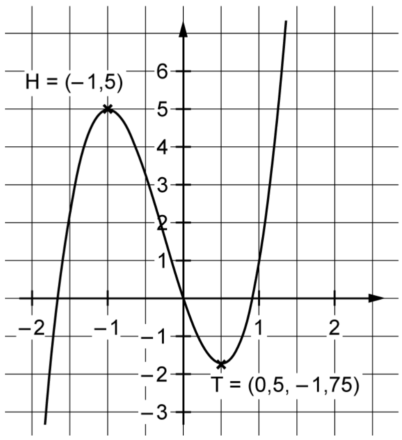
7 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -7x^2 + 5$ besitzt einen Punkt $C(a\,|\,f(a))$.
Berechnen Sie den Wert für $0 < a < 0{,}84$ so, dass das Dreieck mit den Punkten $A(0\,|\,0)$, $B(a\,|\,0)$ und $C(a\,|\,f(a))$ einen möglichst großen Flächeninhalt hat.

8 Bestimmen Sie zu jedem Graphen eine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion, die zu diesem passen könnte. Beziehen Sie in Ihre Überlegungen eventuelle Symmetrieeigenschaften mit ein und berücksichtigen Sie den Grad, der bei dieser Funktion mindestens vorliegen muss.

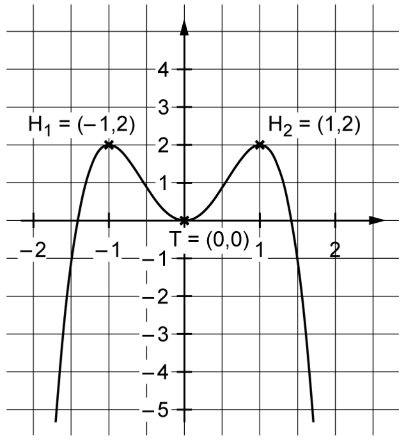
a)



b)



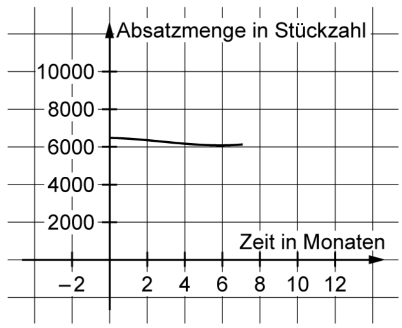
c)



9 Ein Zulieferer für eine Mobilfunkfirma stellt Touch-Displays her. Seine Verkäufe an die Mobilfunkfirma sind von der jeweils aktuellen Nachfrage abhängig und in der nebenstehenden Grafik dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat der Zulieferer die größte Menge an Displays des Halbjahres geliefert (6500 Stück) und zum Zeitpunkt $t = 6$ mit 6068 Stück die geringste Menge.

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades mithilfe der angegebenen Extremstellen.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion und beschreiben Sie seine Bedeutung im Kontext.



10 Eine Funktionenschar wird durch f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2kx + k$ dargestellt.

a) Bestimmen Sie das globale Minimum der Funktion f_k in Abhängigkeit von k.

b) Untersuchen Sie, für welche k die Funktion f_k zwei verschiedene Nullstellen hat. Geben Sie an, für welche k die Funktion f_k keine Nullstellen hat.

■ **11** Eine Funktionenschar ist mit $f_k(x) = 2x^2 - 2kx + k$ gegeben.

a) Skizzieren Sie mithilfe des GTR den Graphen von f_k für verschiedene Parameter k zwischen −5 und 5.

b) Bestimmen Sie die Ortskurve, auf der alle Tiefpunkte der Schar liegen.

c) Überprüfen Sie folgende Aussage rechnerisch: Die Graphen der Funktionenschar haben keinen Wendepunkt.

Check-out: Klausurvorbereitung – Test- und Trainingsaufgaben – Lösungen

1 (A) - (3) (B) - (4) (C) - (1) (D) - (2)

2 a) $T_1\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{39}{8}\right)$; $T_2\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{39}{8}\right)$, $H(0|5)$

b) $T\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{5}{27}\right)$, $H(-1|1)$

c) $T\left(\frac{3}{4}\middle|-\frac{27}{256}\right)$, kein Hochpunkt

d) $T\left(-\frac{1}{3}\middle|-\frac{5}{9}\right)$, $H\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{1}{9}\right)$

3 a) Falsch, für $x > x_0$ ist $f''(x) > 0$, nach dem Monotoniesatz ist dann f' für $x > x_0$ streng monoton wachsend.
b) Falsch. Der Graph von f' hat an der Stelle $x = x_0$ ein lokales Minimum, denn f'' wechselt an der Stelle das Vorzeichen von − zu +.
c) Falsch, für $x < x_0$ gilt $f''(x) < 0$. Der Graph von f ist somit rechtsgekrümmt für $x < x_0$.
d) Richtig. Da f'' eine lineare Funktion mit positiver Steigung ist, ist $f'''(x) > 0$ für alle x. Daraus folgt, dass der Graph von $f'(x)$ eine Linkskurve ist.

4 1. Ableitung $f'(x) = x^3 + x^2 + 2x$
2. Ableitung $f''(x) = 3x^2 + 2x + 2$
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f(0) = 0$, also $N(0|0)$
Nullstellen: $f(x) = 0$ führt zu $x = 0$, also nur eine Nullstelle N.
Extremstellen: $f'(x) = 0$ ergibt $x = 0$. $f''(0) = 2$, also größer 0. Daraus folgt, es gibt ein Minimum an der Stelle 0. $T(0|0)$.
Wendepunkte: $f''(x) = 0$ hat keine Lösung. Folglich gibt es keine Wendestellen.

5 a) Eine Stelle x_0, an der der Graph einer Funktion f *von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt*, heißt Wendestelle von f.
b) Wenn für eine Funktion f gilt, dass *$f'(x_0) = 0$* und $f''(x_0) < 0$, dann hat die Funktion f ein lokales *Maximum* $f(x_0)$.
c) Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt *Sattelpunkt*.
d) Der Parameter einer Funktionenschar wird beim Ableiten wie *eine Zahl* behandelt.

6 a) $W(0|0)$

b) $W\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2}{27}\right)$

c) $W(-2|-6)$, $W(0|0)$

d) $W\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{17}{8}\right)$, $W\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{25}{8}\right)$

7 Zielgröße: $A = \frac{1}{2}g \cdot h$

Nebenbedingungen: $g = a$; $h = f(a) = -7a^2 + 5$, $f(a) > 0$ für $0 < a < 0{,}84$

Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2}a \cdot (-7a^2 + 5) = -\frac{7}{2}a^3 + \frac{5}{2}a$

$A'(a) = -\frac{21}{2}a^2 + \frac{5}{2}a$

$A'(a) = 0$ liefert $a = \pm\sqrt{\frac{5}{21}} \approx 0{,}488$

$A\sqrt{\frac{5}{21}} \approx 0{,}813$

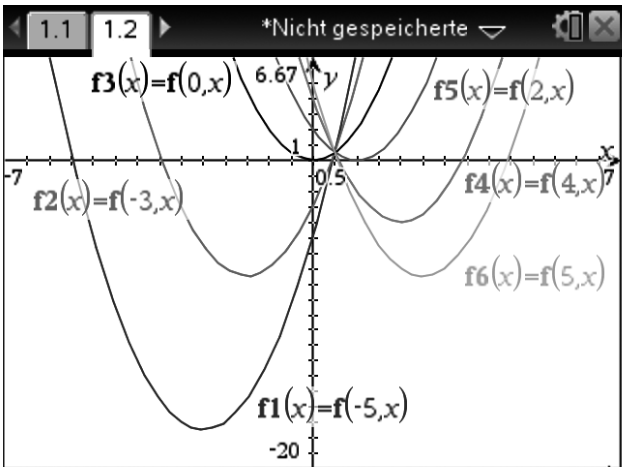
Für $a = \sqrt{\frac{5}{21}}$ wird das Dreieck mit etwa 0,813 Flächeneinheiten maximal

8 a) $f(x) = 2x^4 + 1$ b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2$

9 a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Gleichungen: $f(0) = 6500$; $f(6) = 6068$, $f'(0) = 0$, $f'(6) = 0$
Lösen des Gleichungssystems ergibt $a = 4$, $b = -36$, $c = 0$, $d = 6500$, also $f(x) = 4x^3 - 36x^2 + 6500$
b) $f''(x) = 24x - 72 = 0$ ergibt $x = 3$. Wendepunkt $W(3\,|\,6284)$
Die Zahl der verkauften Touch-Displays sinkt im Monat März am stärksten.

10 a) $f'_k(x) = 0{,}5x^2 + 2kx + k$; $f''_k(x) = 1$
$f'_k(x) = 0$
$0{,}5x^2 + 2kx + k = 0$
$x = -2k$
Da $f''_k(x)$ ungleich 0 ist, liegen an den Stellen $-2k$ Extrema vor. Da die Graphen der Funktionenschar nach oben geöffnete Parabeln sind, sind die Extrema globale Minima.
$f(-2k) = 0{,}5(-2k)^2 + 2k \cdot (-2k) + k = -2k^2 + k$.
Die Tiefpunkte sind $T(-2k\,|\,-2k^2 + k)$.
b) Die Graphen der Funktionen sind nach oben geöffnete Parabeln. Es gibt jeweils 2 verschiedene Nullstellen, wenn die Minima kleiner Null sind und es gibt keine Nullstellen, wenn sie größer Null sind.
$-2^2 + k > 0$
$k(-2k + 1) > 0$
$k > 0$ und $-2k + 1 > 0$ oder $k < 0$ und $-2k + 1 < 0$
$k > 0$ und $k < \frac{1}{2}$ oder $k < 0$ und $k > \frac{1}{2}$
Für $0 < k < \frac{1}{2}$ haben die Graphen von f_k keine Nullstellen.
Für $k < 0$ oder für $k > \frac{1}{2}$ haben die Graphen von f_k zwei Nullstellen.

11 a)



b) Zum Bestimmen der Ortskurve, die Berechnung der Extremstellen durchführen.
Zwischenergebnisse: $f'(x) = 4x - 2k$. ,$f''(x) = 4$.
Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}k$. Da $f''(x)$ größer 0,
liegt bei $x = \frac{1}{2}k$ ein Tiefpunkt vor.
$f\left(\frac{1}{2}k\right) = -0{,}5k^2 + k$, also $T(0{,}5k\,|\,-0{,}5k^2 + k)$
$k = 2x$ einsetzen in: $y = -0{,}5k^2 + k$ ergibt
$y = -2x^2 + 2x$
c) $f''(x) = 4$. Da $f''(x)$ für alle k größer Null ist, hat kein Graph der Funktionenschar einen Wendepunkt.