Check-out: Klausurvorbereitung – Selbsteinschätzung

Checkliste „Integral“	Testaufgaben	Kann ich schon	Da bin ich fast sicher	Ich bin noch unsicher	Kann ich noch nicht	Hilfen im Buch, die man bei Problemen nacharbeiten kann (LE = Lerneinheit)	Trainingsaufgaben (WVV = Wiederholen, Vertiefen, Vernetzen)
1. Ich kann die Zusammenhänge zwischen Ober- und Untersumme und Integral und zwischen Integral und Stammfunktion beschreiben und Ober- und Untersummen zu gegebenen Funktionen berechnen..	1					LE 2, Lehrtext und Merkkasten; LE 3, Lehrtext	LE 2, A. 5; LE 3, A. 4 S. 58 Nr. 3b, c
2. Ich kann entscheiden, ob der Wert eines Integrals positiv oder negativ ist.	2					LE 2, Beispiel 2	LE 2, A. 9; WVV, A. 8
3. Ich kann zu einer Funktion eine Stammfunktion skizzieren.	3					LE 3, Beispiel 1	LE 3, A. 1
4. Ich kann entscheiden, ob eine Funktion Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion ist.	4					LE 3, Merkkasten 1	LE 3, A. 2
5. Ich kenne die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion.	5					LE 3, Merkkasten 1	LE 3, A. 6
6. Ich kann Integrale mithilfe des Hauptsatzes berechnen.	6					LE 3, Merkkasten 2	LE 3, A. 4, A. 11
7. Ich kann zu einer Funktion eine Stammfunktion angeben.	7					LE 4, Lehrtext und Merkkasten	LE 4, Aufgaben 1 – 3
8. Ich kann Methoden der Integralrechnung im Sachzusammenhang einsetzen.	8, 9					LE 5, Lehrtext	WVV, A. 12 – 15
9. Ich kann den Flächeninhalt zwischen zwei Graphen und zwischen Graph und x-Achse bestimmen.	10					LE 5, Beispiele 2 und 3	LE 5, A. 8
10 Ich kenne die Eigenschaften von Integralfunktionen und kann Integralfunktionen zu gegebenen Funktionen bestimmen, zeichnen und Gleichungen lösen.	11					LE 6, S. 74-75 mit Beispielen	S. 76 Nr. 8, 9

Check-out: Klausurvorbereitung – Test- und Trainingsaufgaben

1 a) Wenn die Grenzwerte der Ober- und der Untersumme einer Funktion f in einem Intervall [a, b] gleich sind, dann heißt dieser Grenzwert ______________________________.

b) Eine Funktion F heißt Stammfunktion zur Funktion f, wenn gilt ______________________________.

c) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet: Für eine stetige Funktion f auf einem Intervall [a, b] gilt ____________________ wobei F eine beliebige ____________________ auf [a, b] ist.

2 Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Integral positiv, negativ oder null ist.

a) $\int_{-3}^{6} x^3 dx$ b) $\int_{0}^{6} -x^3\, dx$ c) $\int_{-3}^{6} \left(-\sqrt{x^2}\right)^2 dx$ d) $\int_{4}^{12} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Integrale mit dem GTR berechnen.

3 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Skizzieren Sie dazu einen Graphen
a) der Ableitungsfunktion f′,
b) einer Stammfunktion von f,
c) der Integralfunktion zur unteren Grenze –1.

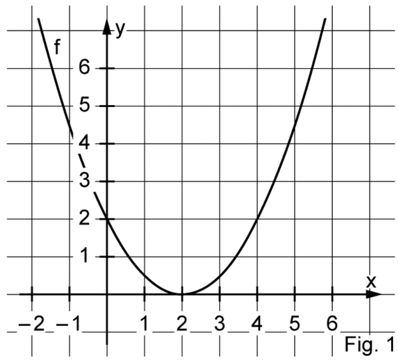


Fig. 1

4 Prüfen Sie, ob F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f(x) = x + 5$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + c$
b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2$; $F(x) = 2x^4 + 5x^3$
c) $f(x) = 0{,}2x^3$; $F(x) = 0{,}08x^4 + 7$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 18$
e) $f(x) = x^2 + x$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5$
f) $f(x) = x^2 + x$; $F(x) = 2x^3 + 5x^2$

5 Der Graph der Funktion f ist in Fig. 2 dargestellt. Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
A: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle.
B: Die Funktion f hat das lokale Minimum 2.
C: Eine Stammfunktion F von f hat eine Nullstelle an der Stelle 0.
D: Eine Stammfunktion F von f hat bei $x = 2$ eine Wendestelle.

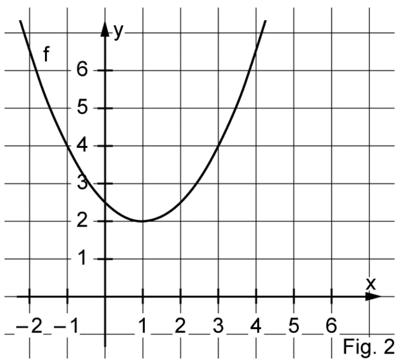


Fig. 2

6 Bestimmen Sie das Integral mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

a) $\int_{2}^{8} \left(5x^4 - 3x^2 - x\right) dx$ b) $\int_{0}^{2\pi} \sin(x) + x^2\, dx$ c) $\int_{-5}^{5} (3x)^2 dx$ d) $\int_{1}^{7} (x + 5)\, dx$

7 Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 15$

c) $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{(17)}$

d) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

e) $f(x) = 150x^4 + 2x^3 - 145x^4$

f) $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^2$

8 a) Ein Flussgebiet wird immer wieder von Überschwemmungen geplagt, da der Fluss in großen Kurven durch die Landschaft verläuft. In dem betroffenen Abschnitt lässt sich der Flusslauf näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ beschreiben (x und f(x) jeweils in km). Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Überschwemmungsgebiets (schraffierte Fläche in Fig. 1).

b) Ein Ingenieur hat die Idee, den Fluss zu begradigen. Der neue Verlauf lässt sich zwischen den 0 und 2,75 näherungsweise durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$ beschreiben.

Skizzieren Sie den neuen Verlauf des Flusses. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die nun nicht mehr überschwemmt wird.

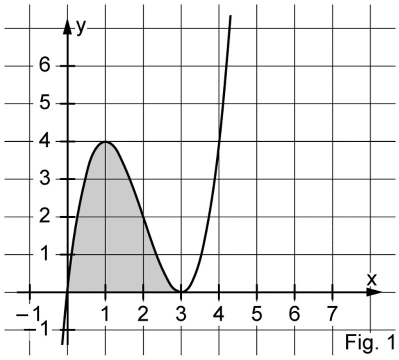


Fig. 1

9 Das Fundament einer Umkleidekabine für Sportler soll gegossen werden. Eine Firma wird damit beauftragt einen Kostenvoranschlag zu erstellen.
Der Einfluss in das Fundament kann etwa durch folgende Funktion modelliert werden:
$f(x) = -x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x$ (x in Stunden , f(x) m^3/Stunde).
Die Schnittpunkte mit der x-Achse bezeichnen den Start- und den Endpunkt des Befüllens.
Pro Fahrmischerladung können ca. 8 m^3 transportiert werden. Berechnen Sie, in welcher Höhe der Kostenvoranschlag ausfallen muss, wenn pro Ladung Beton inklusive Arbeitszeit 100 € anfallen.

10 Bestimmen Sie den Flächeninhalt der von den Graphen von f und g begrenzt wird.
$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 3;\ g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 2(x-4) + 3$

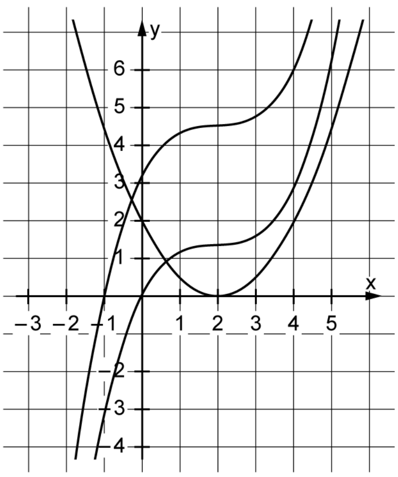
11 Bestimmen Sie zur Funktion f mit f(x)= 0,5x + 1 die Integralfunktion zur unteren Grenze u. Zeichnen Sie für u=0, u=1, u=2 die zugehörigen Graphen. Berechne x, so dass $J_1(x)$=4 gilt.

Check-out: Klausurvorbereitung – Test- und Trainingsaufgaben – Lösungen

1 a) Wenn die Grenzwerte der Ober- und der Untersumme einer Funktion f in einem Intervall [a, b] gleich sind, dann heißt dieser Grenzwert *Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b.*
b) Eine Funktion F heißt Stammfunktion zur Funktion f, wenn gilt *F'(x) = f(x)*.
c) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet: Für eine stetige Funktion f auf einem Intervall [a, b] gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ wobei F eine beliebige **Stammfunktion von f** auf [a, b] ist.

2 a) positiv b) negativ c) positiv d) negativ

3



4 a) ja
b) nein, F ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 8x^3 + 15x^2$
c) nein, F ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 0{,}32x^3$
d) ja
e) nein, F ist eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$
f) nein, F ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 6x^2 + 10x$

5 A: Stimmt, denn der Graph von f hat den Tiefpunkt (1|2)
B: Stimmt, denn der Graph von f hat den Tiefpunkt (1|2)
C: Stimmt, denn eine Stammfunktion zu f ist bis auf eine Konstante c eindeutig festgelegt. Für eine Funktion F kann die Konstante so gewählt werden, dass der Graph der Funktion durch den Punkt (0|0) verläuft.
D: Falsch, denn wenn F an der Stelle x = 2 eine Wendestelle hätte, dann müsste die Ableitung f dort eine Extremstelle haben.

6 a) $\left[x^5 - x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_2^8 = 32\,224 - 22 = 32\,202$

b) $\left[-\cos(x) + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi} = -1 + \frac{8}{3}\cdot\pi^3 + 1 = \frac{8}{3}\cdot\pi^3$

c) $\left[3x^3\right]_{-5}^{5} = 3\cdot 5^3 + 3\cdot 5^3 = 750$

d) $\left[\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_1^7 = \frac{119}{2} - \frac{11}{2} = 54$

7 a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 15x + c$

c) $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \sqrt{(17)}\,x + c$

d) $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + c$

e) $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 + c$

f) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 + c$

8 a) Schnittpunke des Graphen mit der x-Achse bestimmen ergibt P(0|0) und Q(3|0).
Inhalt der schraffierten Fläche $A = \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4{,}5x^2\right]_0^3 = 6{,}75$

Die Fläche des Überschwemmungsgebiets beträgt $6{,}75\,km^2$.

b) Um den Fläche des Gebiets zu bestimmen, das nicht mehr überschwemmt wird, berechnet man den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird.
Zunächst sind die Schnittpunkte zwischen den beiden Graphen zu berechnen. Diese lauten: $P(0|0)$ und $Q\left(2{,}75\,\middle|\,\frac{11}{64}\right)$.

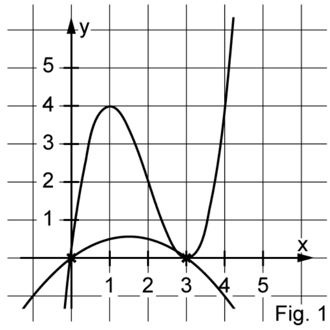


Fig. 1

$$A = \int_0^{2,75} x^3 - 6x^2 + 9x - (-\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{4}x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2,75} x^3 - 5{,}75x^2 + 8{,}25x\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{23}{12}x^3 + \tfrac{33}{8}x^2\right]_0^{\frac{11}{4}} \approx 5{,}63$$

Die Fläche beträgt etwa $5{,}63\,\text{km}^2$.

9 Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse lauten $P(0|0)$ und $Q(4|0)$.

Die Fläche unter dem Graphen beträgt $\int_0^4 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4$ = 138,13. Es werden also 138,13 Kubikmeter Beton benötigt. Das entspricht 17,27 Ladungen von $8\,\text{m}^3$. Die Kosten betragen also mindestens 1727 €.

10 Schnittpunkte der Graphen P (0 | 3) und Q (4 | 3). Flächeninhalt zwischen den Graphen:

$$A = \int\left(\frac{-1}{2}x^2 + 2x + 3\right) - \left(0{,}5(x-4)^2 + 2(x-4) + 3\right)dx = \int_0^4 -x^2 + 4x\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

11.

$J_u(x) = \int_u^x (0{,}5t + 1)\,dt = [0{,}25t^2 + t]_u^x\ 0{,}25\,x^2 + x - 0{,}25u^2 - u$

$J0(x) = 0{,}25\,x^2 + x$
$J_1(x) = 0{,}25\,x^2 + x - 1{,}25$
$J_2(x) = 0{,}25\,x^2 + x - 3$

Zeichnungen überprüfe mit GTR.
$J_1(x) = 4$
$\int_1^x (0{,}5t + 1)\,dt = 4$
Mit GTR: nSolve($\int_1^x (0{,}5t + 1)\,dt = 4$, x)
Lösung: x≈2,701